

## ГЛАВА 2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

### 2.1. Асимптотические формулы для собственных чисел волноводных мод световода со ступенчатым профилем показателя преломления

Решения уравнений Максвелла для электромагнитной волны, распространяющейся в диэлектрическом цилиндре хорошо известны. Различные способы определения собственных чисел характеристического (дисперсионного) уравнения рассмотрены и проанализированы в обзоре литературы (Гл. 1). Однако, как будет показано ниже, для некоторых случаев использование известных асимптотических и приближенных формул либо неудобно, т.к. требует решения трансцендентного уравнения, либо может дать некорректный результат. Поэтому получение простых арифметических формул для расчета собственных чисел волноводных мод многомодового волоконного световода, позволяющих использовать их для решения задач численного моделирования, по-прежнему остается актуальной.

Рассмотрим задачу о вычислении собственных чисел характеристического уравнения для гибридных мод диэлектрического цилиндрического световода с бесконечной оболочкой и ступенчатым профилем показателя преломления. Из условий непрерывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей на границе раздела сред, следует [6,67]:

$$\left(\frac{1}{w} \frac{K_l'(w)}{K_l(w)} + \frac{1}{u} \frac{J_l'(u)}{J_l(u)}\right) \left(\frac{n_2^2}{w} \frac{K_l'(w)}{K_l(w)} + \frac{n_1^2}{u} \frac{J_l'(u)}{J_l(u)}\right) = \left(\frac{V^2}{u^2 w^2}\right)^2 \frac{l^2 \beta^2}{k_0^2} \quad (2.1.1)$$

где  $J_l(u)$ ,  $K_l(w)$ ,  $J_l'(u)$ ,  $K_l'(w)$  - функции Бесселя, модифицированные функции Ханкеля и их производные по аргументам  $u$ ,  $w$  соответственно,  $l$  - азимутальный индекс моды,  $k_0 = 2\pi / \lambda$  - величина волнового вектора в вакууме,  $n_1$ ,  $n_2$  - показатели преломления сердцевины и оболочки. Величины  $u$ ,  $w$  связаны с осевой постоянной распространения  $\beta$  и приведенной частотой  $V$  согласно формулам:

$$u = r_0 (n_1^2 k_0^2 - \beta^2)^{1/2}$$

$$w = r_0 (\beta^2 - n_2^2 k_0^2)^{1/2}$$

$$V = r_0 k_0 (n_1^2 - n_2^2)^{1/2},$$

где  $r_0$  - радиус сердцевины световода. Приближенные решения характеристического уравнения (2.1.1), полученные для малой разности показателей преломления  $\Delta n$  сердцевины и оболочки приводятся во многих работах, например [1-3,67]. Положив правую часть

уравнения (2.2.1) равной нулю, уравнение (2.1.1) формально распадается на два независимых уравнения (так называемое приближение слабонаправляемых мод [2,3]):

$$\frac{1}{w} \frac{K'_l(w)}{K_l(w)} + \frac{1}{u} \frac{J'_l(u)}{J_l(u)} = 0 \quad (2.1.2)$$

$$\frac{n_2^2}{w} \frac{K'_l(w)}{K_l(w)} + \frac{n_1^2}{u} \frac{J'_l(u)}{J_l(u)} = 0 \quad (2.1.3)$$

Однако для поперечных волн ( $l \neq 0$ ) правая часть уравнения 2.1.1 может быть равна нулю только при условии  $V = 0$  (величина  $k_0$  является константой при фиксированном значении  $\lambda$ , а осевая постоянная распространения изменяется в пределах  $n_2 k_0 < \beta < n_1 k_0$ ). Таким образом, принятое приближение  $\Delta n \rightarrow 0$  влечет за собой  $V \rightarrow 0$ , т.е. соответствует одномодовому режиму распространения волноводных мод. Границы применимости приближения слабонаправляемых мод для расчета собственных чисел мод многомодового волоконного световода подробно не исследовались. Кроме того, решение уравнений (2.1.2), (2.1.3) также как и (2.1.1), возможно лишь численными методами, поэтому указанные уравнения сложно использовать на практике.

Для получения аналитических решений характеристического уравнения представим (2.1.1) в виде:

$$F_1(u)F_2(u) = F_3(u) \quad (2.1.4)$$

где

$$F_1(u) = \frac{J'_l(u)}{J_l(u)} + \frac{u}{w} \frac{K'_l(w)}{K_l(w)} \quad (2.1.5)$$

$$F_2(u) = n_1^2 \frac{J'_l(u)}{J_l(u)} + n_2^2 \frac{u}{w} \frac{K'_l(w)}{K_l(w)} \quad (2.1.6)$$

$$F_3 = \frac{V^4}{w^4 u^2} \frac{l^2 \beta^2}{k_0^2} \quad (2.1.7)$$

Введем точки  $p_{l,s}$ ,  $q_{l,s}$ ,  $\eta_{l,s}$ ,  $\xi_{l,s}$  являющиеся  $s$  - корнем соответствующего уравнения:

$$F_1(u) = 0 \quad \text{для } p_{l,s} \quad (2.1.8)$$

$$F_2(u) = 0 \quad \text{для } q_{l,s} \quad (2.1.9)$$

$$J_l(u) = 0 \quad \text{для } \eta_{l,s} \quad (2.1.10)$$

$$J'_l(u) = 0 \quad \text{для } \xi_{l,s} \quad (2.1.11)$$

В интервалах  $\eta_{l,s-1} < u < \eta_{l,s}$  уравнение (2.1.1) имеет два решения -  $u_{l,s}^{(1)}$  и  $u_{l,s}^{(2)}$ , исключая интервал  $0 < u < \eta_{l,1}$ , где существует лишь единственное решение -  $u_{l,s}^{(2)}$ . Традиционно,

решения  $u_{l,s}^{(2)}$  обозначают как собственные числа  $HE$  моды, а  $u_{l,s}^{(1)}$  - как  $EH$  моды. Следует отметить, что используемая нумерация корней характеристического уравнения отличается от существующей нумерации гибридных волноводных мод ( $HE_{i,j}$ ,  $EH_{i,j}$ ). Так как на участке  $0 \dots \eta_{l,l}$  имеет место только одно решение -  $u_{l,s}^{(2)}$ , нумерация собственных чисел  $u_{l,s}^{(1)}$  начинается, фактически, с  $s=2$ . Такой подход удобен с математической точки зрения, так как связан с математическим решением и сопоставляет точки  $u_{l,s}$  с характерными точками бесселевых функций и их производных. Но традиционно, нумерацию  $EH_{1,s}$  мод начинают с единицы ( $s=1$ ), а линейно-поляризованной группой  $LP_{0,j}$  считают группу, образованную двумя модами  $HE_{1,j}$ . Если моды, соответствующие решениям  $u_{l,s}^{(1)}$ ,  $u_{l,s}^{(2)}$  обозначить как  $W_{1,s}^{(1)}$ ,  $W_{1,s}^{(2)}$ , то будет иметь место соответствие:  $W_{1,s}^{(1)} \equiv EH_{1,s-1}$ ,  $W_{1,s}^{(2)} \equiv HE_{1,s}$ . Принимая во внимание, что существуют и другие системы нумерации мод [5], обобщим взаимосвязь индексов волноводных мод, образующих линейно-поляризованные группы, в таблице 1.

В качестве примера на рис. 2.1 приведены зависимости  $F_1(u)$ ,  $F_2(u)$  - кривые 1,2 и  $uK'_l(w)/wK_l(w)$ ,  $n_2^2 uK'_l(w)/wK_l(w)$  - кривые 3,4 для  $l=1$ ,  $V=100$  в диапазоне  $u$  40...50. Уравнение (2.1.1) можно также представить в виде:

$$\mathfrak{F}_1(u)\mathfrak{F}_2(u) = \mathfrak{F}_3(u) \quad (2.1.12)$$

где  $\mathfrak{F}_1(u) = F_1(u)$ ,  $\mathfrak{F}_2(u) = F_2(u)/n_1^2$ ,  $\mathfrak{F}_3 = F_3(u)/n_1^2$ . Тогда, аналогично [18] графики зависимостей  $\mathfrak{F}_1$  и  $\mathfrak{F}_2$  будут почти совпадать, а сами функции  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$  - иметь близкие значения. На рис. 2.2 приведено графическое решение уравнения (4) для  $l=1$ ,  $V=100$ . Кривая 1 соответствует произведению  $F_1(u)F_2(u)$ , кривая 2 - функции  $F_3(u)$ . При  $u \gg 1$ ,  $w \gg 1$  можно полагать  $F_3 \ll 1$ ,  $|uK'_l(w)/wK_l(w)| \ll 1$ , тогда решение уравнения (1) следует искать вблизи точек  $\xi_{l,s}$ . Для больших индексов  $s$  решения уравнения (2.1.11) практически совпадают с решениями асимптотических уравнений [68], но при больших азимутальных индексах  $l$  и малых  $s$  отличия становятся существенными.

Следуя работам [5,18], представим функции  $F_1(u)$ ,  $F_2(u)$ ,  $F_3(u)$  в виде ряда Тейлора в окрестности точек  $\xi_{l,s}$ , производя дифференцирование при  $V = const$ :

$$F_i(u) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^{(m)}}{\partial u^{(m)}} F_i(u) \Big|_{V=const, u=\xi_{l,s}} (u - \xi_{l,s})^m, \quad i=\{1,2,3\}.$$

Таблица 2.1.

азимутальный индекс	обозначение группы	традиционная нумерация	используемая нумерация
$i=0$	$LP_{0,j}$	$HE_{1,j}$	$W_{1,j}^{(2)}$
$i=1$	$LP_{1,j}$	$HE_{2,j} + TE_{0,j}$ $HE_{2,j} + TM_{0,j}$	$W_{2,j}^{(2)} + TE_{0,j}$ $W_{2,j}^{(2)} + TM_{0,j}$
$i>1$	$LP_{i,j}$	$HE_{i+1,j} + EH_{i-1,j}$	$W_{i+1,j}^{(2)} + W_{i-1,j+1}^{(1)}$

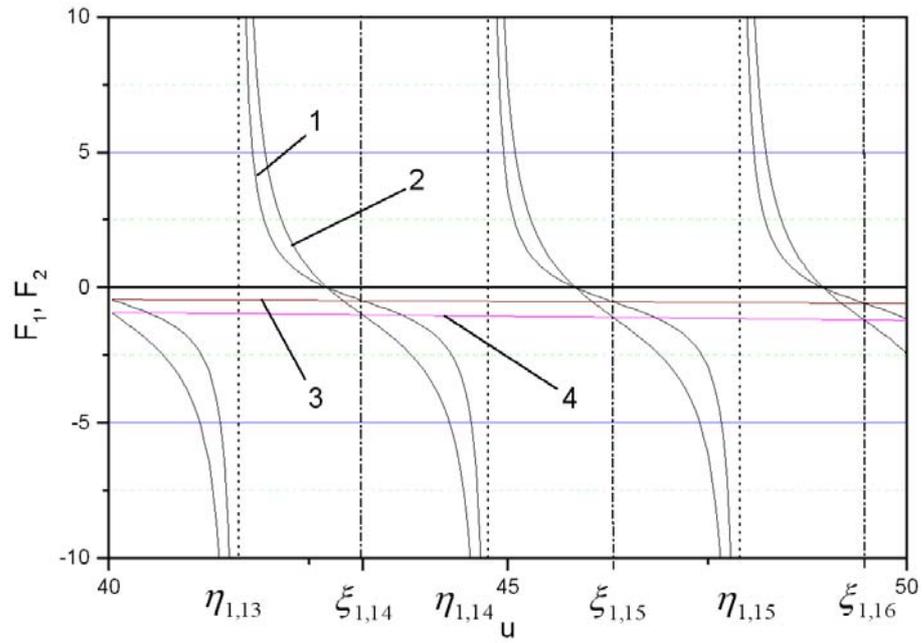


Рис. 2.1. Функции  $F_1(u)$ ,  $F_2(u)$  от  $u$  при  $V=100$ ,  $n_1=1.45$ ,  $n_A$ ,  $l=1$ .

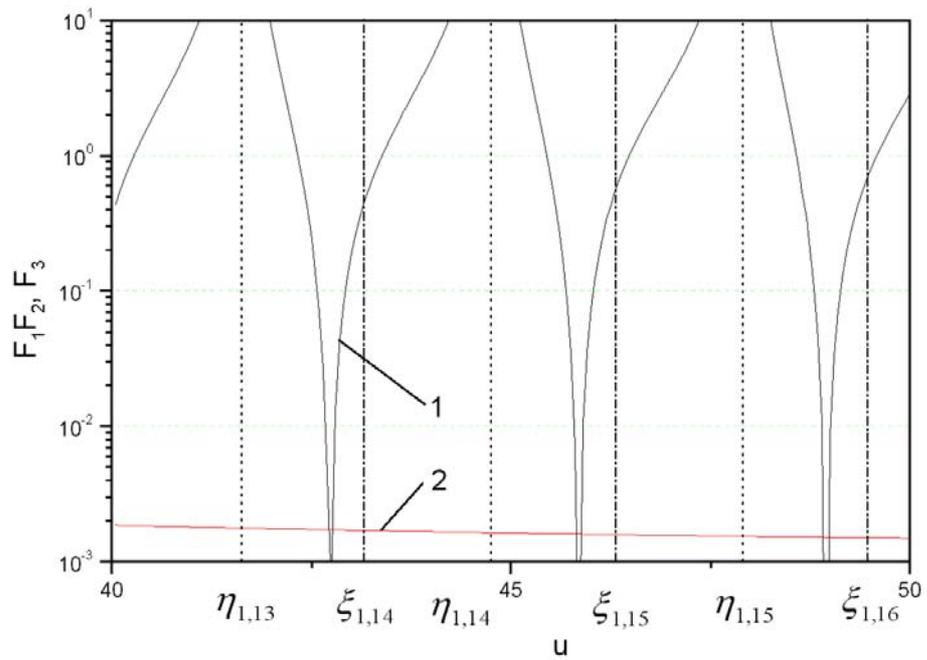


Рис. 2.2. Графическое решение характеристического уравнения  $F_1(u) \cdot F_2(u) = F_3(u)$ .

В малой окрестности точки  $\xi_{l,s}$  ( $|u - \xi_{l,s}| \ll 1$ ) можно ограничиться линейным приближением.

Тогда:

$$F_1(u) = a_0 + a_1(u - \xi_{l,s}) \quad (2.1.13)$$

$$F_2(u) = b_0 + b_1(u - \xi_{l,s}) \quad (2.1.14)$$

$$F_3(u) = c_0 + c_1(u - \xi_{l,s}) \quad (2.1.15)$$

Коэффициенты  $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1$  вычисляются по формулам:

$$a_0 = F_1(\xi_{l,s}), \quad b_0 = F_2(\xi_{l,s}), \quad c_0 = F_3(\xi_{l,s}) \quad (2.1.16)$$

$$a_1 = \left. \frac{\partial}{\partial u} F_1(u) \right|_{\xi_{l,s}}, \quad b_1 = \left. \frac{\partial}{\partial u} F_2(u) \right|_{\xi_{l,s}}, \quad c_1 = \left. \frac{\partial}{\partial u} F_3(u) \right|_{\xi_{l,s}} \quad 2.1. (17).$$

Используя выражения (2.1.5) – (2.1.7), с учетом (2.1.11), выражения (2.1.16) можно преобразовать к виду:

$$a_0 = \frac{\xi_{l,s}}{\zeta_{l,s}} \frac{K_l'(\zeta_{l,s})}{K_l(\zeta_{l,s})}$$

$$b_0 = n_2^2 \frac{\xi_{l,s}}{\zeta_{l,s}} \frac{K_l'(\zeta_{l,s})}{K_l(\zeta_{l,s})}$$

$$c_0 = \frac{V^4}{\xi_{l,s}^2 \zeta_{l,s}^4} \frac{l^2 \mu_{l,s}^2}{k_0^2}$$

где  $\zeta_{l,s} = (V^2 - \xi_{l,s}^2)^{1/2}$ ,  $\mu_{l,s} = (n_1^2 k_0^2 - \xi_{l,s}^2 / r_0^2)^{1/2}$ . Произведя дифференцирование  $F_1(u)$ ,  $F_2(u)$ , пренебрегая слагаемыми высшего порядка малости, полагая  $w \gg 1$ , в точках  $\xi_{l,s}$  получаем:

$$a_1 = \frac{J_l'(\xi_{l,s})}{J_l(\xi_{l,s})} + \frac{K_l'(\xi_{l,s})}{K_l(\xi_{l,s})} \cdot \frac{1}{\xi_{l,s}} + \frac{\xi_{l,s}^2}{\zeta_{l,s}^3} \left( \frac{K_l'(\xi_{l,s})}{K_{l,s}(\xi_{l,s})} \right)$$

$$b_1 = n_1^2 \frac{J_l'(\xi_{l,s})}{J_l(\xi_{l,s})} + n_2^2 \frac{K_l'(\xi_{l,s})}{K_l(\xi_{l,s})} \cdot \frac{1}{\xi_{l,s}} + n_2^2 \frac{\xi_{l,s}^2}{\zeta_{l,s}} \left( \frac{K_{l,s}'(\xi_{l,s})}{K_{l,s}(\xi_{l,s})} \right)$$

Представим вторую производную функции Бесселя в виде:

$$J_l''(u) = \left( \frac{l^2}{u^2} - 1 \right) J_l(u) - \frac{1}{u} J_l'(u)$$

в частности, в точках  $\xi_{l,s}$ , для которых выполняется условие (2.1.11), можно записать:

$$J_l''(\xi_{l,s}) / J_l(\xi_{l,s}) = l^2 / \xi_{l,s}^2 - 1.$$

При  $w \gg 1$  [5,117-118]:

$$K_l'(w) / K_l(w) \approx -(1 - 1/(2w)) \quad (2.1.18)$$

Относительная точность приближения (18) при  $l=1$ ,  $w>5.5$  – лучше  $10^{-2}$ , при  $w>19$  – лучше  $10^{-3}$ . Для волноводных мод с большим азимутальным индексом следует ввести дополнительное ограничение -  $w \gg l$ . Так, например, для  $l=10$  относительная точность  $10^{-1}$  достигается лишь при  $w>20$ . При необходимости (например, при  $l \approx w$ ) можно использовать уточненную аппроксимацию для (2.1.18) в виде

$$\frac{K'_l(w)}{K_l(w)} \approx -\left(1 - \frac{1}{2w}\right) - \frac{4l^2 - 1}{8w^2}.$$

С учетом (2.1.18) коэффициенты  $a_1$ ,  $b_1$  могут быть определены без вычисления значений цилиндрических функций. Исключая диапазон собственных чисел вблизи отсечки  $w<1$ , получаем:

$$a_1 = \frac{l^2}{\xi_{l,s}^2} - 1 - \frac{1}{\zeta_{l,s}} \left(1 - \frac{1}{2\zeta_{l,s}}\right) - \frac{\xi_{l,s}^2}{\zeta_{l,s}^3} \left(1 - \frac{1}{2\zeta_{l,s}}\right) \quad (2.1.19)$$

$$b_1 = n_1^2 \frac{l^2}{\xi_{l,s}^2} - n_1^2 - \frac{n_2^2}{\zeta_{l,s}} \left(1 - \frac{1}{2\zeta_{l,s}}\right) - \frac{n_2^2 \xi_{l,s}^2}{\zeta_{l,s}^3} \left(1 - \frac{1}{2\zeta_{l,s}}\right) \quad (2.1.20)$$

$$a_0 = -\frac{\xi_{l,s}}{\zeta_{l,s}} \left(1 - \frac{1}{2\zeta_{l,s}}\right) \quad (2.1.21)$$

$$b_0 = n_2^2 a_0 \quad (2.1.22)$$

При  $\xi_{l,s} \gg 1$  из выражений (2.1.19) – (2.1.22) следует:

$$a_0 = -\xi_{l,s} / \zeta_{l,s}, \quad b_0 = -n_2^2 \xi_{l,s} / \zeta_{l,s} \quad (2.1.23)$$

$$a_1 = \frac{l^2}{\xi_{l,s}^2} - 1, \quad b_1 = n_1^2 \frac{l^2}{\xi_{l,s}^2} - n_1^2, \quad (2.1.24)$$

а при  $\xi_{l,s} \gg 1$  и  $\zeta_{l,s} \gg l$  можно записать:

$$a_1 = -1, \quad b_1 = -n_1^2. \quad (2.1.25)$$

Определение коэффициента  $c_1$  требует специального рассмотрения. Для этого проанализируем зависимость  $F_3(u)$ . Примеры графиков  $F_3(u)$  для различных значений  $V$  приведены на рис. 2.3. Очевидно, что для случая  $V \gg 1$ ,  $u \gg l$  практически во всем диапазоне  $u$  выполняется неравенство:  $|F_3(u)| \ll 1$ . Функция  $F_3(u)$  соизмерима или больше единицы только вблизи точек  $u=0$ ,  $u=V$ . Вычислим производную по  $u$  при  $V = const$ , учитывая, что:

$$\left. \frac{\partial \beta}{\partial u} \right|_{V = const} = -\frac{u}{\beta r_0^2}, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial u} \right|_{V = const} = -\frac{u}{w},$$

получаем:

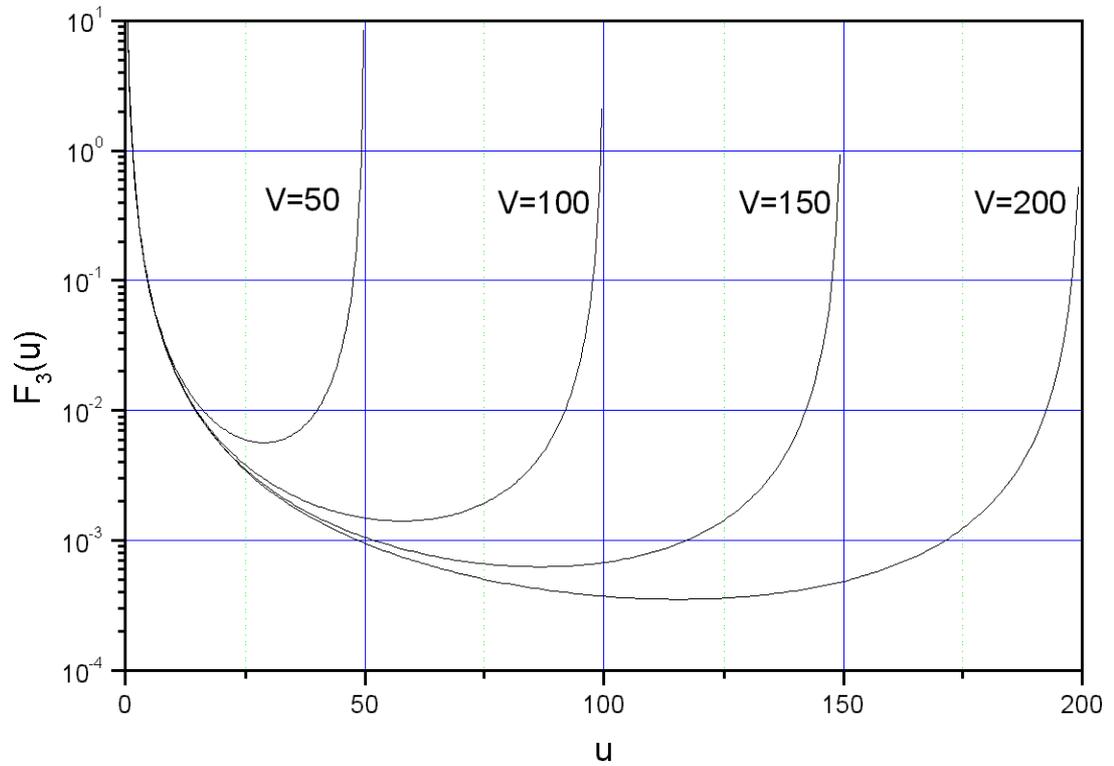


Рис. 2.3. Зависимость  $F_3(u)$  от  $u$  для различных значений  $V$  при  $n_1=1.45$ ,  $n_A=0.1$ ,  $l=1$ .

$$\left. \frac{\partial}{\partial u} F_3(u) \right|_{V = const} = \frac{V^4 l^2}{k_0^2} \cdot \frac{2}{uw^4} \left( -\frac{\beta^2}{u^2} + \frac{2\beta^2}{w^2} - \frac{2}{r_0^2} \right). \quad (2.1.26)$$

Минимальное значение  $F_3(u)$  достигается в точке  $u_m$ :

$$u_m = r_0 k_0 2^{-1/2} \left( -n_A^2 - 3n_1^2 + \sqrt{n_A^4 + 10n_1^2 n_A^2 + 9n_1^4} \right)^{1/2},$$

где  $n_A = (n_1^2 - n_2^2)^{1/2}$  - числовая апертура волоконного световода. При расчете собственных чисел коэффициентом  $c_1$  можно пренебречь, если модуль производной функции  $F_3(u)$  в точке  $\xi_{l,s}$  существенно меньше единицы. Из (2.1.26) следует, что данное условие выполняется при  $w \gg (2n_2 l)^{1/3} V^{1/2}$ , что эквивалентно  $V - \xi_{l,s} \gg \left(\frac{n_2^2 l^2}{2}\right)^{1/3}$  и, тем более выполняется, если  $V - \xi_{l,s} \gg l$ . Следовательно, исключая случаи вблизи отсечки, можно полагать  $|c_1| \ll 1$  практически для всех корней  $\xi_{l,s}$  и, соответственно, величиной  $c_1$  пренебречь.

Подставив выражения (2.1.13)-(2.1.15) в (2.1.1) и разрешая последнее относительно  $u$ , можно получить:

$$u_{l,s}^{(1,2)} = \xi_{l,s} + \chi_{l,s}^{(1,2)}, \quad (2.1.27)$$

$$\text{где } \chi_{l,s}^{(1,2)} = \frac{c_1 - a_0 b_1 - a_1 b_0 \mp ((a_0 b_1 + a_1 b_0 - c_1)^2 - 4a_1 b_1 (a_0 b_0 - c_0))^{1/2}}{2a_1 b_1}.$$

Верхний индекс соответствует решению  $u_{l,s}^{(1)}$ , нижний -  $u_{l,s}^{(2)}$ . В простейшем случае, использование (21)-(24), (25) и  $c_1 = 0$  дает:

$$u_{l,s}^{(1,2)} = \xi_{l,s} - \frac{\xi_{l,s}}{\zeta_{l,s}} \frac{(n_1^2 + n_2^2) \pm ((n_1^2 + n_2^2)^2 - 4n_1^2 (n_2^2 - p_0))^{1/2}}{2n_1^2}, \quad (2.1.28)$$

где  $p_0 = c_0 \zeta_{l,s} / \xi_{l,s}$ . Было проведено сравнение значений собственных чисел, рассчитанных по асимптотическим формулам (2.1.27) с использованием выражений (2.1.19)-(2.1.22), (2.1.27), формулы (2.1.28) и точных значений, полученных численным решением уравнения (2.1.1). Модуль величины абсолютной ошибки  $e_R$  для первых 30-ти корней при  $V = 100$  представлен на рис. 2.4 в виде дискретной графической зависимости. Из полученной оценки следует, что ошибка вычисления собственных чисел по рассмотренным асимптотическим формулам увеличивается по мере возрастания радиального индекса моды  $s$ . Хотя относительная точность  $e_R / \xi_{l,s}$  довольно хорошая во всем диапазоне собственных чисел, абсолютная ошибка  $e_R \approx 1$  при  $\xi_{l,s} \approx V$  во многих случаях не приемлема.

Для расширения возможностей применения асимптотических формул и уменьшения ошибки вычисления собственных чисел предложена следующая аппроксимация:

$$\frac{J'_l(u)}{J_l(u)} \approx -\operatorname{tg}(u - \xi_{l,s}) \quad (2.1.29)$$

Тогда, аналогично (2.1.27), получаем:

$$u_{l,s} = \xi_{l,s} + \operatorname{arctg}\left(\frac{b_s \mp d_s}{2}\right), \quad (2.1.30)$$

где

$$b_s = \left(\frac{n_2^2}{n_1^2} + 1\right) \frac{\xi_{l,s} K'_l(\zeta_{l,s})}{\zeta_{l,s} K_l(\zeta_{l,s})}, \quad (2.1.31)$$

$$d_s = (b_s^2 - 4c_s)^{1/2}, \quad c_s = \frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{\xi_{l,s}^2}{\zeta_{l,s}^2} \left(\frac{K'_l(\zeta_{l,s})}{K_l(\zeta_{l,s})}\right)^2 - \frac{V^4}{\xi_{l,s}^2 \zeta_{l,s}^4} \frac{l^2 \mu_{l,s}^2}{n_1^2 k_0^2}. \quad (2.1.32)$$

В частности, аналогично (2.1.25) можно получить:

$$b_s = -\left(\frac{n_2^2}{n_1^2} + 1\right) \frac{\xi_{l,s}}{\zeta_{l,s}}, \quad d_s = (b_s^2 - 4c_s)^{1/2}, \quad c_s = \frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{\xi_{l,s}^2}{\zeta_{l,s}^2} - \frac{V^4}{\xi_{l,s}^2 \zeta_{l,s}^4} \frac{l^2 \mu_{l,s}^2}{n_1^2 k_0^2}. \quad (2.1.33)$$

Модуль величины абсолютной ошибки  $e_R$  при использовании асимптотической формулы (2.1.29) и приближений (2.1.31)-(2.1.33) приведен на рис. 2.5. Все исходные данные соответствуют расчету на рис. 2.3. Из сопоставления рис. 2.4 и рис. 2.5. следует, что точность формулы (2.1.30) всегда выше, чем (2.1.27).

Для каждого собственного числа  $\xi_{l,s}$  при увеличении  $V$  точность всех рассмотренных асимптотических формул возрастает. В диапазоне  $\xi_{l,s} \gg \zeta_{l,s}$ , т.е. волноводных мод низкого порядка, при  $V \gg 1$ , точность расчета собственных чисел численным решением хорошо известных асимптотических уравнений (2.1.2), (2.1.3) значительно ниже точности полученных асимптотических формул. Для  $\xi_{l,s} < \zeta_{l,s}$ , т.е. высших волноводных мод численные решения уравнений (2.1.2), (2.1.3) позволяют получить точность соизмеримую с точностью формул (2.1.30)-(2.1.32), а в некоторых случаях даже выше. Однако разность собственных чисел  $\Delta u$  ( $\Delta u_{l,s} = u_{l,s}^{(2)} - u_{l,s}^{(1)}$ ) между  $HE_{l,s}$  и  $EH_{l,s-1}$  модами, определяющая максимальный период межмодовых биений LP модовых групп (См. п. 2.1.2.), рассчитанная с использованием решений уравнений (2.1.2), (2.1.3), соответственно и разность постоянных распространения  $\Delta\beta$  оказывается меньше истинного значения на 1-3 порядка. А точность определения  $\Delta u_{l,s}$  с использованием полученных аналитических выражений (2.1.27), (2.1.30) в указанном диапазоне составляет 1...10%, т.е. дает правильные оценочные значения.

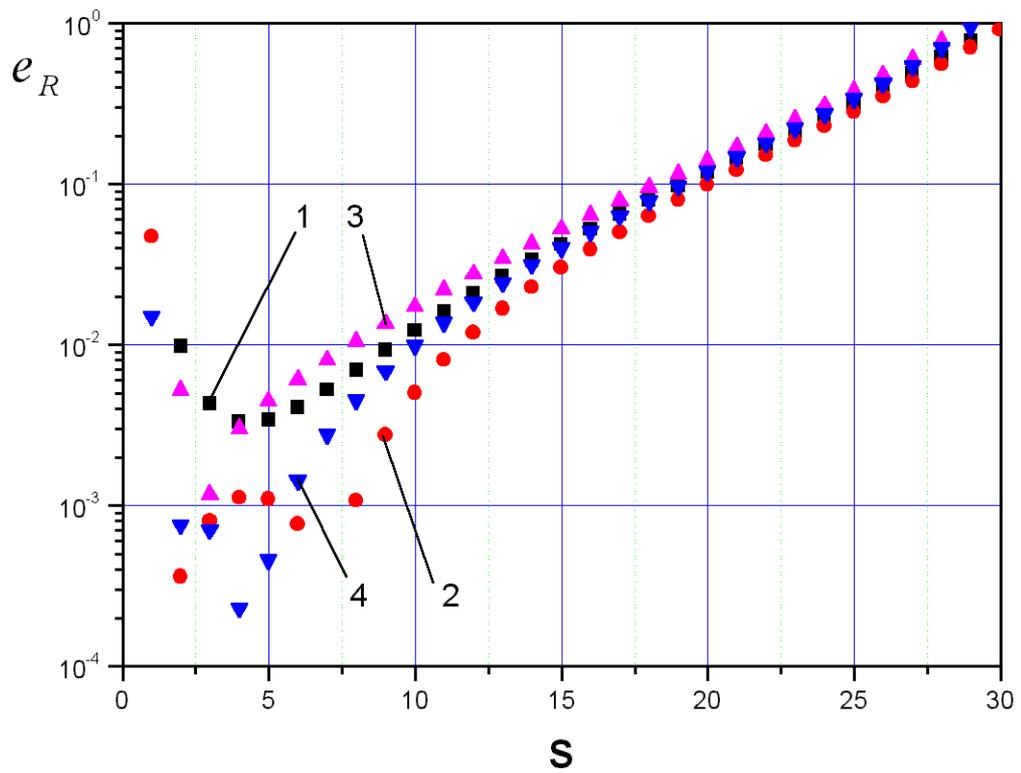


Рис. 2.4. Модуль ошибки вычисления собственных чисел  $e_R$  характеристического уравнения от номера корня  $S$  для световода с  $V=100$ ,  $n_1=1.45$ , числовой апертурой  $n_A=0.1$  при  $l=1$  в линейном приближении: 1-2 – использование приближений (2.1.19)-(2.1.22), 3-4- (2.1.23)-(2.1.24). Точки 1,3 соответствуют  $EH_{l,s-1}$  модам, 2,4-  $HE_{l,s}$  модам.

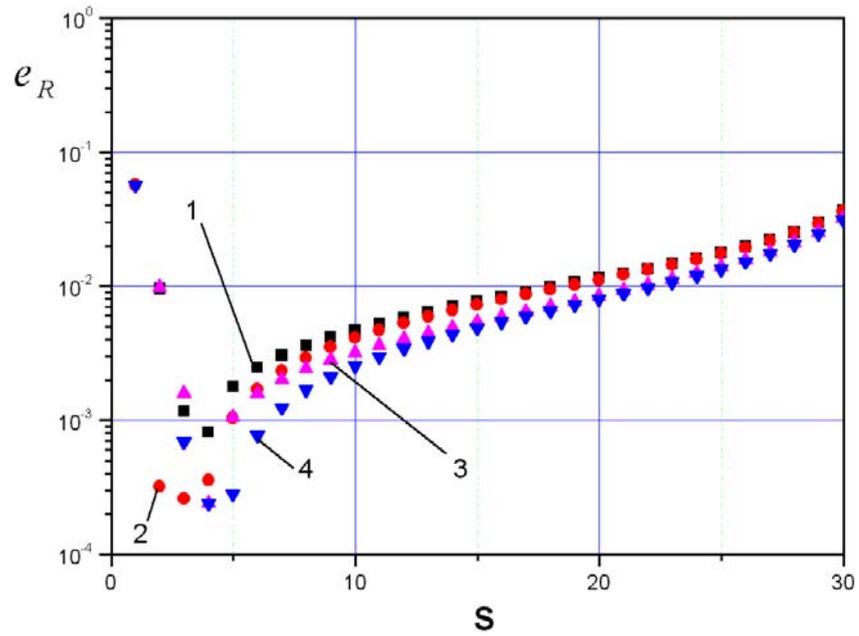


Рис. 2.5. Модуль ошибки вычисления собственных чисел  $e_R$  характеристического уравнения от номера корня  $S$  для световода с  $V=100$ ,  $n_1=1.45$ , числовой апертурой  $n_A=0.1$  при  $l=1$  в приближении аппроксимации отношения Бесселевых функций тангенсом (2.1.29): 1-2 – использование (2.1.31), (2.1.32), 3-4 – (2.1.33). Точки 1,3 соответствуют  $EH_{l,s-1}$  модам, 2,4-  $HE_{l,s}$  модам.

Выбор той или иной формулы для вычисления собственных чисел зависит от поставленной задачи. Ниже будет показано, что для численного моделирования распределения интенсивности, выходящего из волоконного световода можно использовать приближения (2.1.30), (2.1.33), а величину  $\xi_{l,s}$  определять по формуле:

$$\xi_{l,s} = \pi(s - 1 + l/2 + 1/4). \quad (2.1.34)$$

Так, например, для  $V = 100$ ,  $l = 1$ ,  $s = 2$  истинное значение  $\Delta u_{1,2} \approx 3.81 \cdot 10^{-1}$ , формула (2.1.28) дает  $3.90 \cdot 10^{-1}$ , (2.1.30)-  $3.71 \cdot 10^{-1}$ , (2.1.34)-  $3.60 \cdot 10^{-1}$ , а (2.1.2), (2.1.3)-  $2.5 \cdot 10^{-4}$ . Для  $l = 1$ ,  $s = 10$ :  $\Delta u_{1,10} \approx 6.47 \cdot 10^{-2}$ , (2.1.28)-  $7.19 \cdot 10^{-2}$ , (2.1.30)-  $6.53 \cdot 10^{-2}$ , (2.1.34)-  $6.53 \cdot 10^{-2}$ , (2.1.2), (2.1.3)-  $1.35 \cdot 10^{-3}$ , для  $l = 1$ ,  $s = 20$ :  $\Delta u_{1,20} \approx 3.19 \cdot 10^{-2}$ , (2.1.28)-  $5.13 \cdot 10^{-2}$ , (2.1.30)-  $3.22 \cdot 10^{-2}$ , (2.1.34)-  $3.23 \cdot 10^{-2}$ , (2.1.2), (2.1.3)-  $2.27 \cdot 10^{-3}$ .

Аналогичный подход – решение характеристического уравнения методом линеаризации, может быть применен и для поперечных волн, называемых также ТЕ и ТМ модами. Известно, что характеристическими уравнениями для поперечных волн являются [2-6]:

$$\frac{1}{u} \frac{J_1(u)}{J_0(u)} = -\frac{1}{w} \frac{K_1(w)}{K_0(w)} \text{ для } TE_{0,j} \quad (2.1.35)$$

$$\frac{1}{u} \frac{J_1(u)}{J_0(u)} = -\frac{1}{w} \frac{n_2^2 K_1(w)}{n_1^2 K_0(w)} \text{ для } TM_{0,j} \quad (2.1.36)$$

Аналогично ранее рассмотренному случаю, будем искать решения уравнений (2.1.35), (2.1.36) для волноводных мод низкого порядка ( $u \ll V$ ) вблизи точек  $\widehat{\xi}_j$ , удовлетворяющих характеристическому уравнению при бесконечно больших нормированных частотах:

$$J_1(\widehat{\xi}) = 0 \quad (2.1.37)$$

В отличие от  $\xi_{l,s}$ , используемых выше и являющихся корнями производной бesselевых функций,  $\widehat{\xi}_j$  имеет только один индекс, характеризующий номер корня функции Бесселя первого порядка. Пример графического решения уравнений 2.1.35, 2.1.36 представлен в [18].

Разложим частные цилиндрических функций в степенной ряд в окрестности точек  $\widehat{\xi}_j$ :

$$\frac{J_1(u)}{J_0(u)} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{K!} \frac{\partial^K}{\partial u^K} \left( \frac{J_1(u)}{J_0(u)} \right) \Bigg|_{\widehat{\xi}_j, V = const} (u - \widehat{\xi}_j)^K \quad (2.1.38)$$

$$\frac{K_1(w)}{K_0(w)} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{K!} \frac{\partial^K}{\partial w^K} \left( \frac{K_1(w)}{K_0(w)} \right) \Bigg|_{\widehat{\xi}_j, V = const} (u - \widehat{\xi}_j)^K \quad (2.1.39)$$

Используя рекуррентные соотношения для цилиндрических функций, аналогично (2.1.25), произведя дифференцирование, можно получить:

$$\left. \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{J_1(u)}{J_0(u)} \right) \right|_{\widehat{\xi}_j, V = const} = 1, \quad (2.1.40)$$

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left( \frac{J_1(u)}{J_0(u)} \right) \right|_{\widehat{\xi}_j, V = const} = -\frac{1}{\widehat{\xi}_j}. \quad (2.1.41)$$

Принимая во внимание формулы 2.1.40, 2.1.41 и 2.1.18, в линейном приближении характеристические уравнения приобретают вид:

$$u - \widehat{\xi}_j = -u/V \text{ для } TE_{0,j}$$

$$u - \widehat{\xi}_j = -(u/V)(n_2^2/n_1^2) \text{ для } TM_{0,j}$$

Тогда в приближении  $V \gg 1$  для собственных чисел поперечных волн  $u_j^{(TE)}$ ,  $u_j^{(TM)}$  получаем:

$$u_j^{(TE)} = \widehat{\xi}_j V / (V + 1) \quad (2.1.42)$$

$$u_j^{(TM)} = \widehat{\xi}_j V / (V + \gamma_r), \quad (2.1.43)$$

где  $\gamma_r = n_2^2/n_1^2$ . Собственные числа  $TE$  и  $TM$  мод в этом случае различны, т.е. вырождение, свойственное известным асимптотическим формулам, снимается. Это позволяет, как будет показано в п. 2.2. определить длину волны поляризационных биений между соответствующими линейно-поляризованными модовыми группами, используя простые арифметические выражения. Следует также отметить, что точность формул 2.1.42 и 2.1.43 приближенно на порядок лучше, чем при использовании классических формул [2]. Точность определения собственных чисел поперечных мод с использованием формул 2.1.42 и 2.1.43 выше, чем точность определения собственных чисел гибридных мод с использованием формулы 2.1.30. При возрастании нормированной частоты  $V$  относительная ошибка вычисления собственных чисел поперечных мод уменьшается, т.е. формулы следует рассматривать как асимптотические для  $V \gg 1$ .

Представленные в работе соотношения позволяют получить аналитические зависимости для основных модовых характеристик волоконных световодов со ступенчатым профилем показателя преломления и существенно расширяют возможности применения асимптотических формул для решения задач волоконной оптики.

## 2.2. Асимптотические формулы для расчета длины волны поляризационных и спектрально-поляризационных биений

Для многих прикладных целей целесообразно или даже необходимо использование многомодовых волоконных световодов со ступенчатым профилем показателя преломления. Технические характеристики таких устройств могут в значительной степени зависеть от поляризационных и дисперсионных характеристик световода. Численные методы расчета параметров многомодовых ВС не позволяют в полной мере проанализировать основные закономерности при распространении излучения, а классические асимптотические формулы, как будет показано ниже, не позволяют получить корректной оценки поляризационных эффектов в многомодовых ВС. Одним из подходов к решению задачи об изменении поляризации является использование приближения линейно-поляризованных модовых групп (LP) [1-6]. Однако границы применимости указанного приближения для световодов со ступенчатым ППП в литературе подробно не рассматриваются. Не существует также аналитических выражений для корректного расчета длины волны поляризационных биений и дисперсионных характеристик LP групп. Основой для таких расчетов могут быть аналитические выражения, позволяющие рассчитать разность собственных чисел (соответственно и разность осевых постоянных распространения) волноводных мод, образующих линейно-поляризованные модовые группы или различные модовые группы. Получению и анализу таких выражений и посвящен данный параграф.

Известно, что при распространении двух волноводных мод с близкими значениями осевых постоянных распространения  $\beta_1, \beta_2$  между ними возникают биения. В зависимости от направления поляризации интерферирующих мод, биения представляют собой периодическое изменение интенсивности или направления поляризации излучения. Период биений определяется выражением [10]:

$$|\Delta\beta|z_F = 2\pi \quad (2.2.1)$$

где  $\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2$ ,  $z_F$  - длина световода. Расстояние  $L_z$ , определяемое отношением

$$L_z = 2\pi / \Delta\beta \quad (2.2.2)$$

называют длиной волны биений между двумя модами [2]. Если интерферирующие моды изначально имели линейные ортогональные поляризации, то при распространении излучения по световоду, при достижении разности фаз  $\pi/2$  результирующее поле будет обладать эллиптической поляризацией, а при одинаковых модулях напряженностей полей – круговой поляризацией. Во многих случаях удобно использовать величину  $L_z$ , характеризующую минимальную длину, на которой возникает набег фаз  $\pi/2$ :

$$L_z = \pi / 2\Delta\beta, \quad (2.2.3)$$

то есть,  $L_z = \Lambda_z / 4$ . Далее в будем называть  $L_z$  длиной распада. Для случая интерференции двух волн, образующих LP модовую группу в рамках идеализированной модели имеет место пространственно периодическое по длине световода изменение поляризации. Если в ВС распространяются различные LP модовые группы с различными квазислучайными, но близкими значениями длины распада  $L_{z1}, L_{z2}, L_{z3}, \dots, L_{zi}, \dots, L_{zj}$  (для любых  $i, j, m$  должно выполняться  $|L_{zi} - L_{zj}| \ll L_{zm}$ ) и в начальной точке поляризацию излучения можно было полагать линейной по всей площади торца, то в результате интерференции мод, образующих LP модовые группы на расстоянии, большем, чем минимальное из указанных поляризация излучения всегда будет пространственно неоднородной в площади торца ВС. Таким образом, введенная дина распада LP модовых групп в многомодовом ВС будет характеризовать длину, на которой происходит существенное уменьшение интегральной степени линейной поляризации, что будет подробно рассмотрено в п. 3.1. Термин «распространение LP модовых групп» далее в работе будет трактоваться распространением волноводных мод, образующих LP модовую группу, хотя, строго говоря, линейная поляризация излучения существует только в отдельных точках по длине ВС, а в остальных точках поляризация является эллиптической. Указанный термин является неточным, но в некоторых случаях облегчает понимание материала, особенно, при рассмотрении интерференции различных LP модовых групп. Следует также отметить, что возникновение разности фаз между модами различных поляризаций в LP<sub>0,j</sub> модовых группах реального цилиндрического ВС обусловлено дефектами световода, вызывающими эффект двулучепреломления [3,10]. Теоретически, в идеальном световоде постоянные распространения HE<sub>1,j</sub> мод с различными направлениями поляризации одинаковые, соответственно,  $L_z \rightarrow \infty$ . Распад других LP модовых групп, как будет показано ниже, а также как отмечено в [2], происходит и в бездефектных цилиндрических диэлектрических световодах.

Для многих практических приложений важны спектрально-поляризационные характеристики световодов. Период спектральных биений поляризации также определяется выражением (2.2.1), но изменение фаз интерферирующих мод обусловлено изменением постоянных распространения вследствие изменения длины волны излучения. Следовательно, постоянная величина  $\Delta\beta(\lambda) = const$  не будет влиять на спектральный период биений  $\Lambda_\lambda$ , а величина  $\Lambda_\lambda$  будет определяться выражением [2]

$$\frac{d\Delta\beta}{d\lambda} \Lambda_{\lambda} z_F = 2\pi \quad (2.2.4)$$

Поляризационные и дисперсионные характеристики одномодовых и маломодовых волоконных световодов круглого и эллиптического сечения исследованы довольно подробно как теоретически, так и экспериментально. Это позволяет оценивать необходимые параметры, в частности  $\Lambda_z$  и  $\Lambda_{\lambda}$ , используя существующие формулы для расчетов, например [3,10,83-86]. Для многомодовых волоконных световодов со ступенчатым профилем показателя преломления, даже для случая идеальной цилиндрической формы, получить корректную оценку параметров поляризационных биений можно только численным решением характеристического уравнения, что затрудняет анализ исследуемых закономерностей. Однако, как будет показано далее, для многомодового режима распространения излучения все основные волноводные характеристики мод, в частности, LP модовых групп, могут быть получены в виде простых аналитических выражений.

Известно, что многомодовых волоконных световодах со ступенчатым профилем показателя преломления величина осевой постоянной распространения  $\beta$  находится в пределах [1-6]:

$$n_2 k_0 < \beta < n_1 k_0 \quad (2.2.5)$$

где  $n_1$ ,  $n_2$  - показатели преломления сердцевины и оболочки световода соответственно,  $k_0 = 2\pi / \lambda$ ,  $\lambda$  - длина волны излучения. Соответственно, минимальным и максимальным значением  $\beta$  являются:

$$\beta_{max} \approx k_0 n_1 \quad \beta_{min} \approx k_0 n_2.$$

Длина распада  $L_z$  между волноводными модами с предельными постоянными распространения  $\beta_{min}$  и  $\beta_{max}$  оценивается по формуле:

$$L_z \approx \frac{\pi}{2k_0(n_1 - n_2)} \quad (2.2.6)$$

В этом случае разность  $\Delta\beta$  между линейно-поляризованными группами сравнительно велика, а длина распада линейной поляризации соизмерима с диаметром световода. Для близких значений  $\beta_1 \approx \beta_2$  можно записать:

$$\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2 \approx \Delta u(u_1 + u_2) / (2r_0^2 n_1 k_0) \quad (2.2.7)$$

где  $u_1$ ,  $u_2$  - собственные числа рассматриваемых мод,  $\Delta u = u_2 - u_1$ ,  $r_0$  - радиус сердцевины.

Тогда:

$$L_z = \frac{\pi r_0^2 n_1 k_0}{\Delta u(u_2 + u_1)} \quad (2.2.8)$$

Применим асимптотическую формулу (2.1.28), полученную методом линеаризации уравнения для определения разности собственных чисел волноводных мод ( $V \gg 1$ ). Волноводные моды с одинаковым главным модовым числом [1,9]:

$$m = i + 2j + l \quad (2.2.9)$$

обладают близкими значениями  $\beta$ . Разность собственных чисел  $\Delta u$ , соответственно длину поляризационных биений для мод с различными значениями  $m$  можно вычислить, используя формулу (2.1.28), за исключением случаев, рассмотренных ниже. Так, разность между числами  $u_{l,s}^{(h1)}$ ,  $u_{k,q}^{(h2)}$ , где  $h1, h2 \in \{1,2\}$  - числа, характеризующие моду, можно представить в виде:

$$u_{l,s}^{(h1)} - u_{k,q}^{(h2)} = \Delta \xi_{l,s,k,q} \frac{\xi_{l,s}}{\zeta_{l,s}} \cdot \frac{n_1^2 + n_2^2 + \tau(h1)((n_1^2 + n_2^2)^2 - 4n_1^2(n_2^2 - p_{l,s}))^{1/2}}{2n_1^2} + \frac{\xi_{k,q}}{\zeta_{k,q}} \cdot \frac{n_1^2 + n_2^2 + \tau(h2)((n_1^2 + n_2^2)^2 - 4n_1^2(n_2^2 - p_{k,q}))^{1/2}}{2n_1^2} \quad (2.2.10)$$

где  $\Delta \xi_{l,s,k,q} = \xi_{l,s} - \xi_{k,q}$ ,  $\tau(h) = \begin{cases} 1 & \text{при } h = 1 \\ -1 & \text{при } h = 2 \end{cases}$ . В большинстве случаев, точность

вычисления  $\Delta u$  с использованием выражения (10) составляет  $10^{-2} \dots 10^{-3}$ .

Рассмотрим некоторые частные случаи, представляющие практический интерес. Так, для мод с одинаковыми азимутальными и радиальными индексами (соответственно, для мод  $HE_{l,s}$  и  $EH_{l,s-1}$ ), т.е. мод с наиболее близкими постоянными распространения при одинаковых азимутальных индексах, можно записать:

$$u_{l,s}^{(2)} - u_{l,s}^{(1)} = \frac{\xi_{l,s}}{n_1^2 \zeta_{l,s}} ((n_1^2 - n_2^2)^2 + 4n_1^2 p_{l,s})^{1/2} \quad (2.2.11)$$

Асимптотическим значением указанной разности  $\Delta u$  при  $V \rightarrow \infty$  является:

$$\lim_{V \rightarrow \infty} (u_{l,s}^{(2)} - u_{l,s}^{(1)}) \rightarrow \frac{2l}{\xi_{l,s}} \quad (2.2.12)$$

То есть, можно считать, что разность собственных чисел  $HE_{l,s}$  и  $EH_{l,s-1}$  мод при  $V \gg 1$  не зависит от  $V$  и, в частности, не зависит от длины волны излучения. Учитывая, что  $u_{l,s}^{(1)} + u_{l,s}^{(2)} \approx 2\xi_{l,s}$ , для  $\Delta\beta$  получаем:

$$\Delta\beta \approx \frac{2l}{r_0^2 n_1 k_0} \quad (2.2.13)$$

Соответственно:

$$L_Z \approx \frac{\pi}{4} \cdot \frac{r_0^2 n_1 k_0}{l}. \quad (2.2.14)$$

Полагая  $n_1(\lambda) = const$ , т.е. рассматривая только зависимость, обусловленную волноводным эффектом, имеем:

$$\Lambda_\lambda \approx \frac{2\pi^2 r_0^2 n_1}{z_F l} \quad (2.2.15)$$

Например, для световода с  $r_0=50$  мкм,  $V=100$ ,  $n_A=0.2$ , где  $n_A = (n_1^2 - n_2^2)^{1/2}$  - числовая апертура ВС, при  $l=1$  длина распада составляет около 3 мм, период спектрально-поляризационных биений  $\Lambda_\lambda$  - 0.07 мкм (на метр длины ВС), а при  $l>1$  - соответственно, в  $l$  раз меньше. При увеличении  $r_0$  величины  $L_Z$  и  $\Lambda_\lambda$  возрастают как  $r_0^2$  в соответствии с формулами (2.2.14), (2.2.15).

Для рассмотрения разностей собственных чисел волноводных мод с индексами  $s \gg l$  целесообразно использовать приближение [132-133]:

$$x'_\nu \approx \gamma - \frac{\mu + 3}{8\gamma} - \frac{Q_1}{6(4\gamma)^3} - \frac{Q_2}{15(4\gamma)^{15}} - \dots \quad (2.2.16)$$

где  $\nu$  - порядок цилиндрической функции,  $\mu = 4\nu^2$ ,  $\gamma = (\nu + 1/2 + 2s)\pi / 2$ ,  $Q_1 = 7\mu^2 + 82\mu - 9$ ,  $Q_2 = 83\mu^3 + 2075\mu^2 - 3039\mu + 3537$ . В первом приближении можно полагать:

$$\Delta \xi_{l,s+1,l,s}^{\xi} = \pi \quad (2.2.17)$$

$$u_{l,s+1}^{(1)} - u_{l,s}^{(1)} \approx u_{l,s+1}^{(2)} - u_{l,s}^{(2)} \approx \pi \quad (2.2.18)$$

С учетом второго слагаемого в формуле (14), имеем:

$$\Delta \xi_{l,s+1,l,s}^{\xi} = \pi + \frac{4l^2 + 3}{2\pi(l + 1/2 + 2s + 2)(l + 1/2 + 2s)}. \quad (2.2.19)$$

Так как справедливо

$$\lim_{V \rightarrow \infty} p_{l,s} \rightarrow \frac{V^2 l^2 n_1^2}{\xi_{l,s}^4}, \quad (2.2.20)$$

поправочные слагаемые к (2.2.18) при  $V \rightarrow \infty$  можно представить в виде:

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \left( \frac{\xi_{l,s}}{\xi_{l,s}} \cdot \frac{(n_1^2 + n_2^2) \pm ((n_1^2 + n_2^2)^2 - 4n_1^2(n_2^2 - p_{l,s}))^{1/2}}{2n_1^2} \right) \rightarrow \pm \frac{l}{\xi_{l,s}} \quad (2.2.21)$$

Тогда:

$$u_{l,s+1}^{(1)} - u_{l,s}^{(1)} \approx \pi + \frac{l\pi}{\xi_{l,s+1}\xi_{l,s}} + \frac{4l^2 + 3}{2\pi(l + 1/2 + 2s + 2)(l + 1/2 + 2s)} \quad (2.2.22)$$

$$u_{l,s+1}^{(2)} - u_{l,s}^{(2)} \approx \pi - \frac{l\pi}{\xi_{l,s+1}\xi_{l,s}} + \frac{4l^2 + 3}{2\pi(l + 1/2 + 2s + 2)(l + 1/2 + 2s)} \quad (2.2.23)$$

Следует отметить, что реальное увеличение точности по сравнению с (2.2.18), (2.2.19) достигается только при  $V > 1000$ . В большинстве случаев, точность формул (2.2.22), (2.2.23) при  $V > 100$  не хуже 5%. Так, например, для  $r_0 = 50$  мкм,  $n_l = 1.45$ , при  $l=1$ ,  $s=2$  точность расчета  $u_{l,s+1}^{(1)} - u_{l,s}^{(1)}$  превышает 0.5%, а  $u_{l,s+1}^{(2)} - u_{l,s}^{(2)}$  - 0.2%, однако для  $s=10$  точность составляет порядка 1%. При разности  $\Delta u \approx \pi$  для длины  $L_Z$  справедливо приближение:

$$L_Z = \frac{\pi^2 r_0^2 n_l}{\lambda \xi}, \quad (2.2.24)$$

где  $\xi \approx \xi_{l,s} \approx \xi_{l,s+1}$ , что при  $V \approx 50$  и указанных выше параметров ВС дает оценку  $L_Z$  в диапазоне  $10^{-2} \dots 10^{-3}$  м в зависимости от номера корня, а для  $V \approx 10^3$  при  $r_0 \approx 500$  мкм -  $1 \dots 10^{-2}$  м. В указанном приближении между ближайшими модами и модовыми группами одного типа с одинаковыми азимутальными индексами ( $HE_{l,s}$  и  $HE_{l,s+1}$ ,  $EH_{l,s-1}$  и  $EH_{l,s}$ ,  $LP_{i,j}$  и  $LP_{i,j+1}$ ) длины волн биений  $\Lambda_Z$  равны. Поэтому для корректного описания состояния поляризации при длине световода больше  $\Lambda_Z$  (т.е. осцилляций) необходимо учитывать поправки (2.2.22), (2.2.23).

Для расчета разности собственных чисел волноводных мод с произвольными индексами  $i, j$  необходим более строгий подход. Это связано с тем, что при увеличении порядка функций Бесселя, нули производной -  $\xi_{l,s}$  смещаются в сторону уменьшения в соответствии с формулой (2.2.14) при  $s \gg l$ . В предельном случае -  $s=1$ ,  $l \gg 1$ , асимптотическое представление для  $\xi_{l,l}$  имеет вид [132-133]:

$$\xi_{l,l} \approx l + 0.808618l^{1/3} \quad (2.2.25)$$

Поэтому близкими собственными числами могут обладать моды с различными главными модовыми числами. Так, например, при  $m \gg 1$  из формул (2.2.16), (2.2.25) следует, что:

$$\xi_{l,j} / \xi_{l,l} \approx \pi / 2, \quad (2.2.26)$$

где  $\xi_{l,j}$ ,  $\xi_{l,l}$  - корни производной функции Бесселя для волноводных мод с одним главным модовым числом. То есть, собственные числа при  $m = \text{const}$  могут отличаться более чем в полтора раза. Взаимосвязь индексов ближайших волноводных мод с одним главным модовым числом определяется выражением:

$$m = \text{const}: \quad \dots \rightarrow u_{l-2,s+1} \rightarrow u_{l,s} \rightarrow u_{l+2,s-1} \rightarrow \dots$$

Следует отметить, что при используемой нумерации мод, в отличие от классической нумерации, две волноводные моды, образующие линейно-поляризованную группу  $LP_{i,j}$

обладают одинаковыми главными модовыми числами. В качестве примера рассмотрим рис. 2.6, на котором представлены величины собственных чисел  $u_{l,s}^{(1)}$ ,  $u_{l,s}^{(2)}$  и  $\xi_{l,s}$  как функции азимутального индекса  $l$ . Полученные зависимости иллюстрируют: во-первых, уменьшение собственных чисел при увеличении  $l$  при  $m = \text{const}$ , во-вторых, увеличение разности между собственными числами с одинаковыми индексами  $l, s$  при увеличении  $l$  и уменьшение разности при увеличении  $\xi_{l,s}$  (формула (2.2.12), в-третьих, наличие собственных чисел с близкими значениями, но с различными  $m$  (например:  $u_{10,2}^{(2)}$  и  $u_{5,4}^{(1)}$  или  $u_{8,2}^{(2)}$  и  $u_{1,5}^{(1)}$ ), в-четвертых, близкие значения чисел  $u_{l+1,s}^{(2)}$  и  $u_{l-1,s+1}^{(1)}$ . В связи с тем, что величины собственных чисел зависят от параметров световода, не произведя численных расчетов, невозможно определить, какие из них, кроме  $u_{l+1,s}^{(2)}$  и  $u_{l-1,s+1}^{(1)}$  имеют близкие значения. Поэтому, при определении разности  $\Delta u$  точность расчета каждого собственного числа имеет существенное значение. Критерием возможности применения асимптотических формул может служить сама вычисляемая разность  $\Delta u$ . Если при использовании формулы (2.2.10) (или 2.1.28) разность  $\Delta u$  больше  $10^{-2}$ , то это гарантирует корректность вычисления. Лучшую точность можно получить, применив формулы (2.1.30). В этом случае в качестве критерия корректности вычислений можно использовать величину  $10^{-3}$ .

К сожалению, корректно вычислить разность собственных чисел  $\Delta u_{i,j}^{(LP)}$  мод, составляющих группу  $LP_{ij}$  с использованием формулы (2.1.28), а также (2.1.30) невозможно. Так как точность расчета собственных чисел в первом случае составляет  $10^{-2} \dots 10^{-3}$ , во втором – в 5-10 раз выше, а реальная разность собственных чисел в многомодовом режиме оценивается величиной  $10^{-4} \dots 10^{-8}$ . Поэтому оценка  $\Delta u_{i,j}^{(LP)}$  требует особого рассмотрения. Так в [2] с использованием теории возмущений (См. гл. 1) получено:

$$\frac{\Delta u}{u_{i \pm 1, j}} = - \frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2 V} \quad (2.2.27)$$

Однако численное решение характеристического уравнения (2.1.1) для разности собственных чисел  $\Delta u$  при  $V \rightarrow \infty$ , показывает, что асимптотой для  $\Delta u(V)$  является  $1/V^2$ , а не  $1/V$ . Пример зависимостей  $\Delta u$  от  $V$ , рассчитанных с использованием пакета прикладных программ “Mathematica 5.1” приведен на рис. 2.7. Из графиков следует, что при увеличении  $V$  на один порядок,  $\Delta u$  уменьшается на два порядка. То есть, формула (2.2.27) не соответствует результатам строгого расчета. Можно предположить, что разделение характеристического уравнения на два приближенных уравнения для HE и EH мод [1-2] в

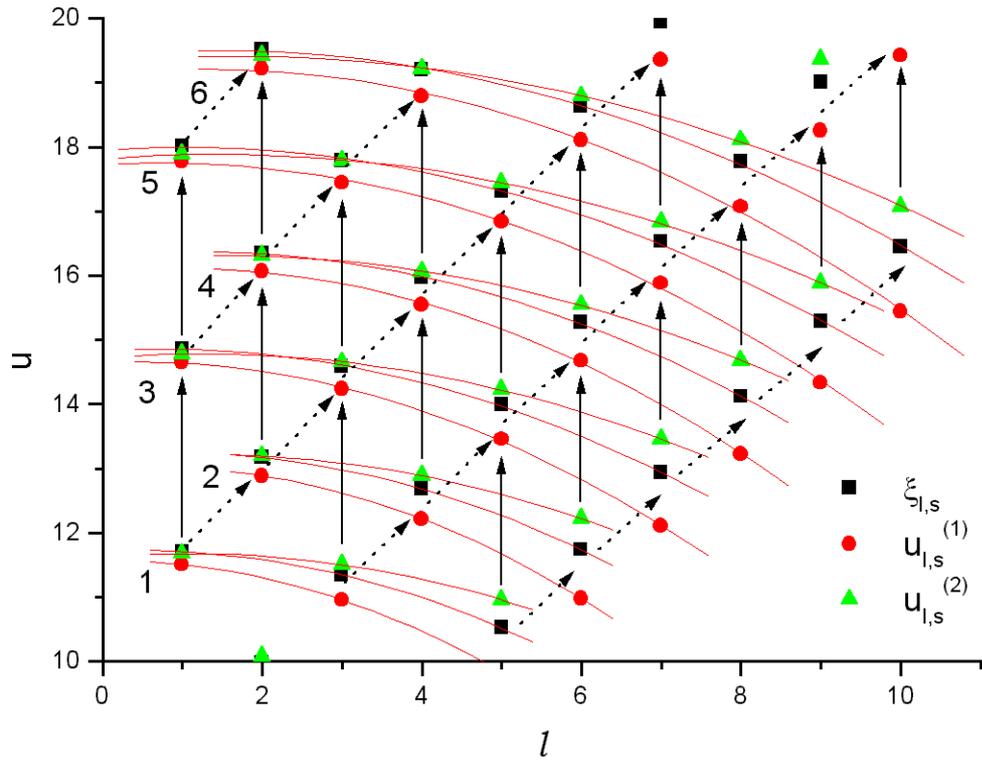


Рис. 2.6. Величины собственных чисел и нулей производных функций Бесселя как функции азимутального индекса  $l$  при  $r_0 = 50$  мкм,  $V=100$ ,  $n_l=1.45$ ,  $n_A=0.2$ :  $\blacksquare$ -  $\xi_{l,s}^{(1)}$ ,  $\bullet$ -  $u_{l,s}^{(1)}$ ,  $\blacktriangle$ -  $u_{l,s}^{(2)}$ , зависимости 1-6 – аппроксимации  $\xi_{l,s}^{(1)}(m = const)$ ,  $u_{l,s}^{(2)}(m = const)$ ,  $u_{l,s}^{(1)}(m = const)$ : 1-  $m=10$ , 2-  $m=11$ , 3-  $m=12$ , ..., 6-  $m=15$ ;  $\uparrow$ - переходы  $s \rightarrow s+1$ ,  $\dashrightarrow$  - переходы  $l \rightarrow l+1$ .

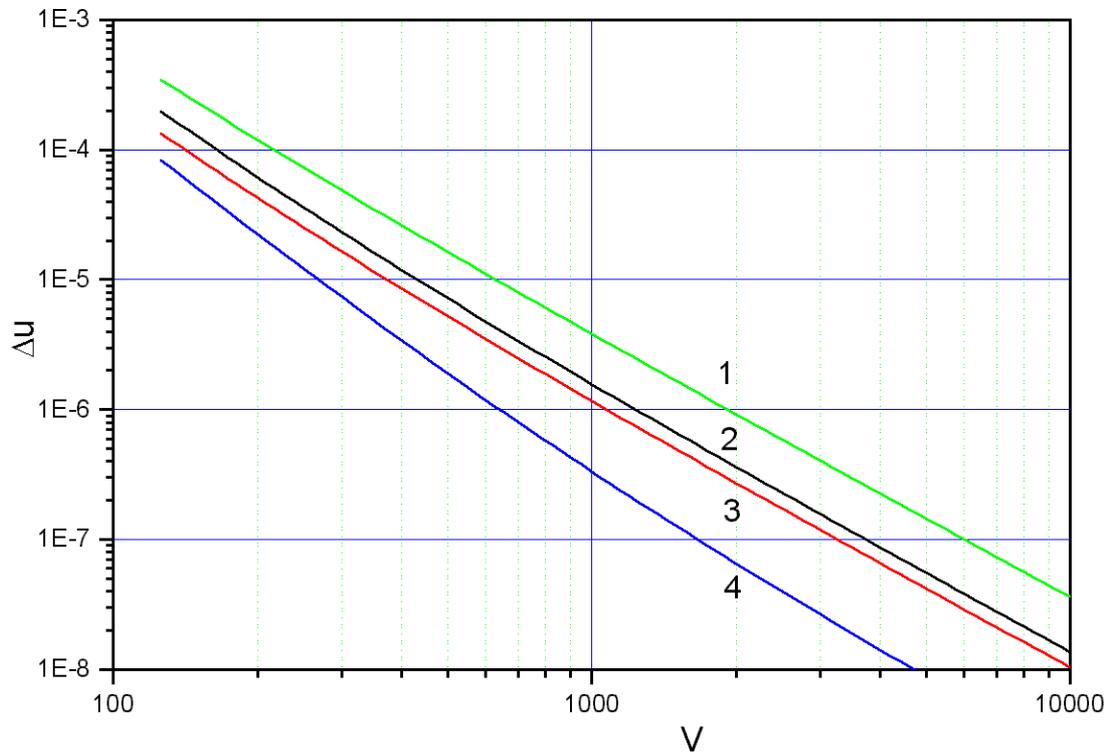


Рис. 2.7. Зависимость разности собственных чисел волноводных мод, образующих  $LP_{ij}$  модовую группу, от нормированной частоты при  $\lambda=0.633$  мкм,  $n_l=1.45$ , 1 - для  $n_A=0.2$ ,  $LP_{2,10}$ , 2 - для  $n_A=0.2$ ,  $LP_{3,5}$ , 3 -  $n_A=0.2$ ,  $LP_{2,5}$ , 4 -  $n_A=0.1$ ,  $LP_{2,5}$ .

рассматриваемом случае приводит к некорректному результату. Полагая  $\Delta u_{i,j}^{(LP)} \rightarrow 0$  при  $V \rightarrow \infty$ , учитывая, что  $\zeta_{i,j} \rightarrow V$ , исходя из уравнения (2.1.1) можно предположить:

$$\Delta u_{i,j}^{(LP)} \propto \frac{\xi_{i,j}^2}{\zeta_{i,j}^2} \left( \frac{n_2^2}{n_1^2} - 1 \right) \quad (2.2.28)$$

На основании чего была предложена следующая аппроксимация:

$$\Delta u_{i,j}^{(LP)} \propto \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\xi_{i,j}^2}{\zeta_{i,j}^2} \cdot \frac{n_A^2}{n_1} \quad (2.2.29)$$

Соответственно:

$$\Delta \beta_{i,j} \approx \frac{\xi_{i,j}^3 n_A^2 \lambda}{4\pi^2 n_1^2 r_0^2 \zeta_{i,j}^2} \quad (2.2.30)$$

$$L_Z \approx \frac{2\pi^3 \zeta_{i,j}^2 n_1^2 r_0^2}{\lambda \xi_{i,j}^3 n_A^2} \quad (2.2.31)$$

$$\Lambda_\lambda \approx \frac{2\pi}{z_F} \left( \frac{\xi_{i,j}^3 n_A^2}{4\pi^2 n_1^2 r_0^2 \zeta_{i,j}^2} + \frac{2\xi_{i,j}^3 n_A^4}{n_1^2 \lambda^2 \zeta_{i,j}^4} \right)^{-1} \quad (2.2.32)$$

Следует отметить, что из (2.1.1) должно следовать:

$$\Delta u_{i,j}^{(LP)} \propto \frac{1}{4} \cdot \frac{\xi_{i,j}^2}{\zeta_{i,j}^2} \cdot \frac{n_A^2}{n_1^2}, \quad (2.2.33)$$

однако формула (2.2.29) дает меньшую ошибку, чем (2.2.28), а зависимость  $1/n_1^2$ , в общем случае, не подтверждается. Формула (2.2.27) занижает величину  $\Delta u_{i,j}^{(LP)}$  приближенно на 1-3 порядка, а формула (2.2.29) позволяет корректно оценить порядок величины  $\Delta u_{i,j}^{(LP)}$ . В качестве примера на рис. 2.2.3, 2.3.4 приведено сравнение расчетных значений  $\Delta u_{i,j}^{(LP)}$  с использованием формулы (2.2.29) и точного численного расчета. Хорошее соответствие наблюдается и для других LP групп. Подробное рассмотрение вопроса точности аппроксимации (2.2.29) приведено в приложении. Оценочное значение длины  $L_Z$  в зависимости от параметров ВС и индексов модовой группы составляет  $1 \dots 10^4$  м, и, как будет показано ниже, в реальных световодах, в определенных случаях распад LP групп может доминировать над другими эффектами, приводящими к изменению поляризации выходящего излучения. Период спектрально-поляризационных биений между модами, образующими LP модовые группы многократно превышает период межмодовых биений, поэтому в многомодовых световодах со ступенчатым ППП, по-видимому, не может быть определен экспериментально.

Для расчета длины распада модовых групп  $LP_{1j}$  необходим иной подход, так как группа образована как гибридными, так и поперечными волноводными модами (табл. 2.1).

С учетом полученных выражений для собственных чисел ТЕ, ТМ мод (2.1.42), (2.1.43) при  $V \gg 1$  разность собственных чисел  $\Delta u_j^{(TE, TM)} = u_j^{(TE)} - u_j^{(TM)}$  можно представить в виде:

$$\Delta u_j^{(TE, TM)} = \frac{\widehat{\xi}_j V (\gamma_r - 1)}{(V + 1)(V + \gamma_r)} \quad (2.2.34)$$

Аналогично (2.1.30), решения для собственных чисел  $u_j^{(TE)}$ ,  $u_j^{(TM)}$  можно получить через обратные тригонометрические функции. Так, например, положив правые части уравнений (2.1.35), (2.1.36) константами с соответствующими значениями в точках  $\widehat{\xi}_j$ , имеем:

$$u_j^{(TE)} = \widehat{\xi}_j + \text{arctg}(-\widehat{\xi}_j / w_j) \quad (2.2.35)$$

$$u_j^{(TM)} = \widehat{\xi}_j + \text{arctg}(-n_2^2 \widehat{\xi}_j / (n_1^2 w_j)) \quad (2.2.36)$$

$$\Delta u_j^{(TE, TM)} = \frac{\widehat{\xi}_j}{w_j} (\gamma_r - 1) \quad (2.2.37)$$

При  $V \rightarrow \infty$  формулы (2.2.34) и (2.2.37) имеют одинаковую асимптотику:

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \Delta u_j^{(TE, TM)} \rightarrow \frac{\widehat{\xi}_j}{V} \left( \frac{n_2^2}{n_1^2} - 1 \right) \quad (2.2.38)$$

В отличие от линейно-поляризованных модовых групп, образованных гибридными модами для которых при  $V \rightarrow \infty$  имеет место асимптотика  $\Delta u \propto 1/V^2$ , разность собственных чисел поперечных волн, а также гибридной и поперечных волн в группе  $LP_{1j}$  при  $V \rightarrow \infty$  имеет асимптотику  $\Delta u \propto 1/V$ .

Простейшим приближением для  $\widehat{\xi}_j$  является:

$$\widehat{\xi}_j = \pi(1/4 + j) \quad (2.2.39)$$

Корни функций Бесселя  $x_{\nu, s}$  допускают асимптотическое представление [132-133]:

$$x_{\nu, s} \approx \rho - \frac{\mu - 1}{8\rho} \left( 1 + \frac{P_1}{3(4\rho)^2} + \frac{2P_2}{15(4\rho)^4} + \dots \right), \quad (2.2.40)$$

где  $\rho = (\nu - 1/2 + 2s)\pi/2$ ,  $\mu = 4\nu^2$ ,  $P_1 = 7\mu - 31$ ,  $P_2 = 83\mu^2 - 982\mu + 3779$ . Тогда, во втором приближении для  $\widehat{\xi}_j$  из (2.2.40) получаем:

$$\widehat{\xi}_j = \frac{(1 + 4j)^2 \pi^2 - 3}{4\pi(1 + 4j)} \quad (2.2.41)$$

Второе приближение для  $\xi_{2,j}$  из формулы (2.2.16) дает:

$$\xi_{2,j} = \frac{\pi^2(4j+1) - 38}{4\pi(4j+1)} \quad (2.2.42)$$

Следует отметить, что точность формул (2.2.34), (2.2.37) существенно выше, чем (2.2.10) для любых  $l$  и  $s$ , поэтому для грубой оценки разности собственных чисел волноводных мод, составляющих группу  $LP_{1,j}$  можно использовать приближение:

$$u_{2,j}^{(2)} - u_j^{(TE)} \approx u_j^{(TM)} - u_{2,j}^{(2)} \approx (u_j^{(TE)} - u_j^{(TM)})/2 \approx \frac{((1+4j)^2\pi^2 - 3)V(\gamma_r - 1)}{8\pi(1+4j)(V+1)(V+\gamma_r)}, \quad (2.2.43)$$

Соответственно, оценочное значение длины распада:

$$L_Z \approx \frac{\pi^2 n_j^3 r_0^2 V}{\lambda \xi_j^2 n_A^2} \quad (2.2.44)$$

То есть, для оценки длины биений (распада) линейно-поляризованных групп  $LP_{1,j}$  собственные числа гибридной моды  $HE_{2,j}$  можно вообще не вычислять. В отличие от формул для собственных чисел гибридных мод, формулы (2.2.34), (2.2.37) позволяют корректно рассчитать разность собственных чисел  $TE_{0,j}$   $TM_{0,j}$  мод в линейно-поляризованной группе  $LP_{1,j}$  при сколь угодно больших величинах  $V$ , соответственно, для сколь угодно малых значений  $\Delta u$ . Порядок величины  $L_Z$  при  $r_0=25$  мкм,  $V=50$  составляет  $1 \dots 10^2$  метра в зависимости от номера корня, а при  $r_0=500$  мкм,  $V=1000$  –  $1 \dots 10^4$  м.

Экспериментальное определение длины волны биений отдельных групп представляет серьезную сложность. При измерениях  $\Delta\beta$  методом последовательного укорачивания ВС [79-80], технически сложно обеспечить постоянство существующих внутренних напряжений в сердцевине и оболочке ВС, соответственно, постоянство наведенного двулучепреломления. Известен также способ непосредственного определения длины поляризационных биений в волоконных световодах – регистрацией поляризационных характеристик Рамановского рассеяния, выходящего через оболочку ВС [10,136-137]. Однако применительно к многомодовым световодам такой метод позволяет только оценить длину, на которой происходит деполяризация излучения. Независимо от способа ввода излучения в световод в многомодовых ВС со ступенчатым профилем показателя преломления всегда распространяется большое количество волноводных мод: селективно возбудить отдельные моды или модовые группы удается только в маломодовых ВС как, например в [138]. Поэтому измерение длины волны биений отдельных LP групп возможно только в одномодовом, маломодовом или градиентном световоде. Таким образом, экспериментально подтвердить корректность полученных выражений для отдельных LP модовых групп не представляется возможным, но, как будет показано ниже, возможно для случая возбуждения широкого спектра мод.

### 2.3. Асимптотическое решение задачи ввода-вывода излучения для многомодовых волоконных световодов

Решение задачи о вводе плоской электромагнитной волны в волоконный световод является основой для решения практически всех задач о вводе излучения в ВС. Определение распределения интенсивности излучения отдельных мод из световода является основой для расчета диаграмм направленности излучения световодов. Наиболее известными работами в этой области являются: работа А. Снайдера [68], применившего разложение плоской электромагнитной волны по волноводным модам световода для решения задачи о вводе и разложение полей волноводных мод по плоским электромагнитным волнам для решения задачи о излучении волноводных мод, а также работы Н.С. Капани [4], применившего для решение задачи о выходе излучения метод Щелкунова. Краткое описание подходов [4,68] дано в обзоре литературы в гл. 1. Полученные в [4,68] выражения содержат произведения и суммы цилиндрических функций, что затрудняет анализ результатов, и не позволяют при необходимости применить простые приближения.

Найдем асимптотические приближения для формул А. Снайдера в случае многомодового волоконного световода ( $V \gg 1$ ), а также произведем оценку влияния проникновения полей в оболочку ВС на коэффициенты возбуждения и пространственные распределения излучения волноводных мод. Согласно [68], мощность, передаваемая волноводной моде с азимутальным индексом  $l$ , радиальным -  $s$  плоской электромагнитной волной с радиусом луча  $d_r$ , где (термин «плоская» употреблен условно, т.к. подразумевается  $d_r \gg \lambda$ ), падающей под углом  $\gamma$  относительно оси световода может быть вычислена по формуле:

$$p_{l,s}(\gamma) = M_{l,s}(a_{l,s}(\gamma) + b_{l,s}(\gamma))^2 \quad (2.3.1)$$

где  $M_{l,s}$  - нормировочный множитель,  $a_{l,s}$ ,  $b_{l,s}$  - коэффициенты возбуждения мод с индексами  $l$ ,  $s$ , определяемые интегралами [68]:

$$a_{l,s} = \frac{1}{J_{l\mp 1}(u_{l,s})} \int_0^1 J_{l\mp 1}(u_{l,s}R) J_{l\mp 1}(Rh) R dR \quad (2.3.2)$$

$$a_{l,s} = \frac{1}{K_{l\mp 1}(u_{l,s})} \int_0^1 K_{l\mp 1}(u_{l,s}R) J_{l\mp 1}(Rh) R dR \quad (2.3.3)$$

где  $u_{l,s}$  - собственное число характеристического уравнения,  $R = r/r_0$  - приведенный радиус,  $D = d_r / \lambda$  - приведенный диаметр луча. Параметр  $h$  является приведенным углом ввода излучения:

$$h = r_0 k_0 \sin(\gamma) \quad (2.3.4)$$

Следуя [68], принимая во внимание, что интеграл (2.3.2) является интегралом Ломмеля [124], а (2.3.3) может быть приведен к интегралу Ломмеля заменой модифицированной функции Ханкеля на функцию Ханкеля с мнимым аргументом, и учитывая, что для цилиндрических функций  $Z$  и  $\bar{Z}$  справедливо [132]:

$$\int r Z_l(\alpha r) \bar{Z}_l(\beta r) dr = \frac{\beta r Z_l(\alpha r) \bar{Z}_{l-1}(\beta r) - \alpha r Z_{l-1}(\alpha r) \bar{Z}_l(\beta r)}{\alpha^2 - \beta^2}, \quad (2.3.5)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  - параметры функций, получаем:

$$\int r J_l(\alpha r) J_l(\beta r) dr = \frac{\beta r J_l(\alpha r) J_{l-1}(\beta r) - \alpha r J_{l-1}(\alpha r) J_l(\beta r)}{\alpha^2 - \beta^2} \quad (2.3.6)$$

$$\int r J_l(\alpha r) K_l(\beta r) dr = -\frac{\beta r J_l(\alpha r) K_{l-1}(\beta r) + \alpha r J_{l-1}(\alpha r) K_l(\beta r)}{\alpha^2 + \beta^2} \quad (2.3.7)$$

Тогда, интегрируя (2.3.2), получаем:

$$a_{l,s} = \frac{1}{J_{l\mp 1}(u_{l,s})} \cdot \frac{\pm u_{l,s} J_l(u_{l,s}) J_{l\mp 1}(h) \mp h J_l(h) J_{l\mp 1}(u_{l,s})}{u_{l,s}^2 - h^2}, \quad (2.3.8)$$

а интегрируя (2.3.3) –

$$b_{l,s} = \mp \frac{D(\pm w_{l,s} J_l(Dh) K_{l\mp 1}(w_{l,s} D) + h J_{l\mp 1}(Dh) K_l(w_{l,s} D)) - (\pm w_{l,s} J_l(h) K_{l\mp 1}(w_{l,s}) + h J_{l\mp 1}(h) K_l(w_{l,s}))}{(w_{l,s}^2 + h^2) K_{l\mp 1}(w_{l,s})} \quad (2.3.9)$$

Рассмотрим случай  $D \gg 1$ , положим  $D \rightarrow \infty$ . В этом случае  $DK_{l\mp 1}(w_{l,s} D) \rightarrow 0$ , а также  $DK_l(w_{l,s} D) \rightarrow 0$ . Следовательно, коэффициент возбуждения  $b_{l,s}$  может быть представлен в виде:

$$b_{l,s} = \mp \frac{\mp w_{l,s} J_l(h) K_{l\mp 1}(w_{l,s}) - h J_{l\mp 1}(h) K_l(w_{l,s})}{(w_{l,s}^2 + h^2) K_{l\mp 1}(w_{l,s})} \quad (2.3.10)$$

Используем для случая  $u_{l,s} \gg 1$  и  $l \ll u_{l,s}$  известную асимптотическую формулу [132-133]:

$$J_l(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos\left(z - \frac{\pi l}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.3.11)$$

Тогда для коэффициентов  $a_{l,s}$  можно получить:

$$a_{l,s} = 2 \frac{-u_{l,s} \cos(u_{l,s} + \nu_l) \sin(h + \nu_l) + u_{l,s} \cos(h + \nu_l) \sin(u_{l,s} + \nu_l) - \chi \cos(h + \nu_l) \sin(u_{l,s} + \nu_l)}{\pi \chi (2u_{l,s} + \chi) u_{l,s}^{1/2} (u_{l,s} - \chi)^{1/2}} \quad (2.3.12)$$

где  $\nu_l = -\pi l / 2 - \pi / 4$ ,  $\chi = u_{l,s} - h$ . Полагая  $|\chi / u_{l,s}| \ll 1$ , т.е. рассматривая малую окрестность вблизи точки  $u_{l,s}$ , представим сомножители  $(u_{l,s} - \chi)^{-1/2}$  и  $(2u_{l,s} + \chi)^{-1}$  в виде произведения

двух линейных функций. Выполнив тригонометрические и алгебраические преобразования, получаем:

$$a_{l,s} = \frac{\sin(\chi)u_{l,s} - \chi(\sin(\chi) + \sin(2u_{l,s} + 2\nu_l - \chi))/2}{\pi\chi u_{l,s}^2 J_{l\mp 1}(u_{l,s})} \left(1 - \frac{\chi^2}{4u_{l,s}^2}\right) \quad (2.3.13)$$

В простейшем приближении, пренебрегая малыми слагаемыми, получаем:

$$a_{l,s}(\chi) = \frac{1}{\pi u_{l,s} J_{l\mp 1}(u_{l,s})} \frac{\sin(\chi)}{\chi} \quad (2.3.14)$$

Для коэффициентов  $b_{l,s}$ , полагая  $u_{l,s} \gg 1$  и исключая из рассмотрения волноводные моды вблизи отсечки, имеющие  $w_{l,s} \ll V$ , учитывая соотношение (2.1.18), можно получить:

$$b_{l,s} = \frac{w_{l,s} J_l(h)}{V^2} \pm \frac{u_{l,s} J_{l\mp 1}(h)}{V^2} \quad (2.3.15)$$

Применение асимптотического приближения (2.3.11) дает:

$$b_{l,s} = \frac{1}{V^2} \left(\frac{2}{\pi h}\right)^{1/2} (w_{l,s} \cos(\mu_l) + u_{l,s} \sin(\mu_l)) \quad (2.3.16)$$

где  $\mu_l = h - \pi l / 2 - \pi / 4$ . Поэтому, при  $u_{l,s} \ll V$  имеет место:

$$|a_{l,s}| \gg |b_{l,s}| \quad (2.3.17)$$

соответственно, влиянием проникновения электромагнитного поля в оболочку ВС можно пренебречь.

Основной максимум коэффициента возбуждения моды с индексами  $l, s$  определяется условием:

$$h = u_{l,s} \quad (2.3.18)$$

а минимумы – условием:

$$h = u_{l,s} \pm (1 + 2K)\pi / 2, \quad (2.3.19)$$

где  $K=0, 1, 2, \dots$  - целое число. С учетом (2.3.4) угол, при котором достигается максимум возбуждения волноводной моды  $\gamma_{l,s}$  можно вычислить по формуле:

$$\gamma_{l,s} = \arcsin(u_{l,s} / (r_0 k_0)) \quad (2.3.20)$$

Полуширина основного максимума в приведенных единицах (2.3.4) составляет  $\pi / 2$ . Следовательно:

$$\Delta\gamma = \lambda / (2d_0), \quad (2.3.21)$$

где  $d_0 = 2r_0$  - диаметр сердцевинны ВС. То есть, соответствует угловой расходимости плоской волны, ограниченной диафрагмой с радиусом  $r_0$ . Следует отметить, что полуширина  $\Delta\gamma$  не

связана с индексами  $l$ ,  $s$ , т.е. при принятых допущениях величина  $\Delta\gamma$  одинаковая для всех волноводных мод.

Сопоставим полученный результат с закономерностями распространения света в волоконном световоде в приближении лучевой модели. Отношение радиальной и аксиальной постоянных распространения моды иногда называют углом распространения  $\psi_{l,s}$  моды в световоде:

$$\sin(\psi_{l,s}) = u_{l,s} / (r_0 k_0 n_1) \quad (2.3.22)$$

Так как волноводные моды являются стоячими волнами в радиальном направлении, под термином «угол распространения» нужно понимать следующее. Волну, распространяющуюся в световоде можно представить в виде суммы двух волн, распространяющихся под углами  $\psi_{l,s}$  и  $-\psi_{l,s}$  под углом к оси ВС, т.е. под термином «угол распространения» надо понимать угол распространения волн, образующих стоячую в радиальном направлении волну. Необходимо также отметить, что лучевая модель распространения излучения в световоде допускает произвольный угол распространения не превышающий апертурный угол световода. Поэтому угол  $\psi_{l,s}$  следует также рассматривать как лучевую интерпретацию волноводной модели распространения излучения в ВС. Сопоставляя (2.3.20) и (2.3.22) можно получить:

$$\sin(\gamma_{l,s}) / \sin(\psi_{l,s}) = n_1 \quad (2.3.23)$$

То есть, в лучевой интерпретации полученные формулы дают классический закон преломления света на границе раздела двух сред.

Наибольшее расхождение между (2.3.8) и асимптотической формулой (2.3.14) наблюдается при углах ввода вблизи оси ВС ( $\gamma \approx 0$ ), а также для мод с большими азимутальными индексами:  $l \gg s$ . Так как в этих случаях не выполняются условия применимости формулы (2.3.11). Более точное рассмотрение с учетом слагаемых следующего порядка малости показывает, что проникновение поля в оболочку ВС может привести к незначительному смещению максимума зависимости мощности, передаваемой волноводной моде от угла ввода за счет влияния коэффициентов  $b_{l,s}(\gamma)$ . Оценка данного эффекта дана в приложении.

В работе А. Снайдера [68] показано, что задача выхода излучения аналогична задаче ввода. Распределения интенсивности излучения отдельных волноводных мод описываются теми же выражениями, что и коэффициенты возбуждения мод при вводе излучения. Поэтому все формулы, полученные для задачи ввода можно применить для расчетов параметров выходящего излучения. В частности, угловое распределение интенсивности излучения,

выходящего из ВС в дальней зоне дифракции для любой моды описывается выражением (2.3.14), где  $\chi$  - нормированный угол выхода  $\theta$  относительно нормированного угла, равного  $u_{l,s}$ . Аналогично (2.3.20) и (2.3.21) справедливы выражения:

$$\theta_{l,s} = \arcsin(u_{l,s} / (r_0 k_0)) \quad (2.3.24)$$

$$\Delta\theta = \lambda / (2d_0) \quad (2.3.25)$$

Угол  $\theta_{l,s}$ , соответствующий максимуму интенсивности выходящего излучения моды с индексами  $l, s$  будем называть углом выхода излучения данной моды. Так как, аналогично задаче ввода излучения, для многомодового волоконного световода

$$\Delta\theta \ll \theta_c, \quad (2.3.26)$$

где  $\theta_c$  - апертурный угол ВС, т.е. излучение любой моды локализовано в узком угловом интервале по сравнению с апертурным углом. Это позволяет однозначно сопоставить каждой моде угол выхода.